УДК 517.925

Ю. Кнежевич-Милянович

# О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(|y'|^{p-1}y'\right)+Q(x)\,y=0.$$

Получены результаты, аналогичные известным результатам для уравнения Эмдена — Фаулера: изучены условия колеблемости и неколеблемости решений, поведение решений при $x\to\infty$.

Будем рассматривать уравнение

$$\frac{d}{dx}|y'|^{p-1}y'+Q(x)\,y=0, \tag{1}$$

где $p>0$, $Q(x)$ — непрерывная на $[0,+\infty)$ функция. В теории обыкновенных уравнений интенсивно изучалось в течение многих лет близкое уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}y+Q(x)|y|^{p-1}y=0, \tag{2}$$

известное как уравнение Эмдена — Фаулера [1, 2]. Уравнение (1) также возникает при изучении различных математических и прикладных вопросов. Его решения обладают рядом специфических качественных свойств.

**Теорема 1.** Если $p<1$, $Q(x)\leqslant-\alpha^2=\mathrm{const}$, $\alpha>0$, то уравнение (1) имеет решения, такие, что $\lim\limits_{x\to x_1-0}y(x)=+\infty$.

Доказательство. Таким решением будет всякое решение с начальными условиями $y(0)>0$, $y'(0)>0$. Действительно, из (1) следует, что $y'(x)$, $y(x)$ монотонно возрастающие при $x>0$ функции. Поэтому

$$y'^{p-1}y''>\alpha y,\quad y''y'^{p}>\alpha yy'.$$

Интегрируя, получаем

$$(p+1)^{-1}y'^{\,p+1}(x)>\alpha y^2(x)+c. \tag{3}$$

Так как $y'(x)\geqslant y'(0)>0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)=+\infty$, и из (3) следует

$$y'(x)\geqslant c_1y^{2/p+1}. \tag{4}$$

Отсюда $c_2-y^{\frac{1-p}{1+p}}(x)\geqslant c_3x$, а это означает, что

$$\lim_{x\to c_3^{-1}c_2}y(x)=+\infty.$$

Покажем, что каждое решение уравнения (1) при $p\geqslant1$, $Q(x)\leqslant0$ неограниченно продолжаемо при $x\to+\infty$. Действительно, решение $y(x)$ непродолжаемо только в случае, когда $|y(x)|\to+\infty$ при $x\to x_1-0$. Пусть $y(x)\to+\infty$ при $x\to x_1-0$. Тогда из (1) получается $y'^{p-1}y''(x)\leqslant\leqslant cy(x)$, $y'^{p}y''(x)\leqslant cy'(x)\,y(x)$ и $y'^{p+1}\leqslant cy^2(x)$, т. е. $y'(x)\leqslant cy(x)$, $y\leqslant\leqslant c_1e^{Cx}$; и это есть противоречие.

**Теорема 2.** Пусть $0<p<1$, $Q(x)\geqslant0$ и для некоторого $q<p$

$$\int\limits_0^\infty t^qQ(t)\,dt=+\infty.$$

Тогда все продолжаемые решения (1) колеблющиеся.

Доказательство. Предположим обратное. В таком случае существует $y(x)>0$ решение уравнения (1), такое, что $y'(x)>0$ при

$x > \bar{x}$. Преобразуем (1):

$$y^{-1}x^q(y'^p)' + Qx^q = 0. \tag{5}$$

Интегрируя (5) от $\bar{x}$ до $x$ и проведя интегрирование по частям, получаем

$$y^{-1}x^q y'^p + \int_{\bar{x}}^{x} y^{-2}x^q y'^{p+1}dx + \int_{\bar{x}}^{x} Qx^2 dx = q\int_{\bar{x}}^{x} y^{-1}x^{q-1}y'^p dx + c. \tag{6}$$

Оценим интеграл в правой части неравенства (3) с помощью условия Гельдера:

$$\int_{\bar{x}}^{x} y^{-1}x^{q-1}y'^p dx \leqslant \left(\int_{\bar{x}}^{x} y^{-2}x^q y'^{p+1}dx\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\bar{x}}^{x} y^{p-1}x^{q-p-1}dx\right)^{1/p+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p}{p+1}\int_{\bar{x}}^{x} y^{-2}x^q y'^{p+1}dx + \frac{1}{p+1}\int_{\bar{x}}^{\infty} y^{p-1}x^{q-p-1}dx. \tag{7}$$

Так как $q < p$ и $y(x)$ возрастает, последний интеграл в (7) сходится. Поэтому из (6), (7) получаем

$$y^{-1}x^q y'^p + \frac{1}{p+1}\int_{\bar{x}}^{x} y^{-2}x^q y'^{p+1}dx + \int_{\bar{x}}^{x} Qx^q dx \leqslant c,$$

что противоречит условию теоремы 2.

Заметим, что в условии теоремы 2 нельзя положить $q = p$. Приведем пример, показывающий, что теорема перестанет быть верной. Положим $Q(x) = y_1^{-1}[-y_1'^p]'$, где $y_1(x) = (\ln x)^\alpha$. Легко видеть, что $Q(x) \sim x^{-1-p}(\ln x)^{\alpha p - p - \alpha}$, и если $\alpha > 0$ достаточно мало, так что $\alpha p - p - \alpha > -1$, то $\int^{\infty} Q x^p dx = \infty$, а уравнение (1) имеет положительное решение.

Теоремы типа теоремы 2 для решений системы уравнений имеются в работе [3]. В случае $p > 1$ следующая теорема является аналогом теоремы 2.

**Теорема 3.** Если $p > 1$, $Q(x) \geqslant 0$, то для колеблемости всех продолжаемых решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{\infty} Qxdx = +\infty. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (8). Докажем, что все продолжаемые решения уравнения (1) колеблющиеся. В противном случае получим, как и при доказательстве теоремы 2, что существует решение уравнения (1), такое, что $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ при $x > \bar{x}$ и $(x - \bar{x})\, y' < y$. Из уравнения (1) получаем

$$(y'^p)' + Q(x)(x - \bar{x})\, y' \leqslant 0.$$

Далее,

$$y'^{-1}\frac{d}{dx}y'^p + Q(x)(x - \bar{x}) \leqslant 0.$$

Интегрируя это неравенство, ввиду условия (8) получаем

$$\int_{\bar{x}}^{x} y'^{p-2}y''dx \to -\infty$$

при $x \to +\infty$. В то же время $\int_{\bar{x}}^{x} y'^{p-2}y''dx = (p-1)^{-1}y'^{p-1} - c$. Значит, $y'(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$, но $y'(x) > 0$ при $x > \bar{x}$. Если $\int^{\infty} Qxdx < \infty$, уравнение (1) имеет положительное при достаточно больших $x$ решение. Это решение может быть получено стандартным путем методом последовательных приближений

$$1-y_{n+1}(x)=\int_x^\infty\left[\int_t^\infty Qy_n dt\right]^{1/p}dx.$$

Заметим, что метод последовательных приближений сходится без ограничения на знак $Q$.

Следующая теорема относится к вопросу об ограниченности всех решений уравнения (1).

**Теорема 4.** Если $Q(x)\geqslant 0$, $Q(x)$ не убывает, тогда все решения уравнения (1) ограничены.

Доказательство. Из уравнения (1) имеем

$$[Q(x)]^{-1}y'\frac{d}{dx}y'^p+y'y=0.$$

Следовательно,

$$y^2+Q^{-1}(x)y'^{p+1}+\int^x Q'(x)Q^{-2}y'^{p+1}dx=c.$$

Отсюда следует нужное утверждение.

**Теорема 5.** Если $Q(x)>0$, $Q'(x)>0$ и непрерывна,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Q(x+1)}{Q(x)}<\infty,\quad \frac{Q'(x)}{Q(x)}\geqslant\frac{a}{x}$$

при некоторой $a=\mathrm{const}>0$, то все решения уравнения (1) стремятся к нулю при $x\to+\infty$.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 5 существует единственное решение при любых начальных условиях $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, $x_0>0$. Классическая теорема Коши неприменима только в случае $y_0=0$, $p>1$. Но в этом случае уравнение (1) можно записать в виде эквивалентной ему системы уравнений

$$\frac{dy}{dz}=z^{-p}Q^{-1}y^{-1},\quad \frac{dx}{dz}=z^{p-1}Q^{-1}y^{-1}$$

при начальных условиях $z=0$, $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

**Лемма 1.** Пусть $y_1(x)$ — решение уравнения (1) при $x>0$, такое, что $y_1(0)>0$, $y_1'(0)=0$, а $Q(x)\geqslant m=\mathrm{const}>0$, $Q'(x)$ непрерывна на $[0,+\infty)$. Если $z_1(x)$ решение уравнения

$$\frac{d}{dx}(z')^p+mz=0,\tag{9}$$

такое, что $z_1(0)=y_1(0)$, $z_1'(0)=0$, то

$$y_1(x)\leqslant z_1(x)$$

на $[0,x_1]$, где $x_1$ — первый положительный нуль функции $y_1(x)$.

Доказательство. Из (1) ясно, что

$$\frac{d}{dx}(y')^p+my\leqslant 0\tag{10}$$

на отрезке, где $y(x)\geqslant 0$. Отсюда

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dx}[y'(x)]^{p+1}+my^2(x)\geqslant my^2(x_1),\quad 0<x\leqslant x_1.\tag{11}$$

Это получается после умножения (10) на $y'$ и интегрирования. Заметим, что в силу (1) функция $y'(x)$ монотонно убывает на $[0,x_1]$, значит, неположительна. Из (11) следует, что

$$\frac{1}{p+1}y'(x)\leqslant-(my^2(0)-my^2(x))^{\frac{1}{p+1}}.\tag{12}$$

Функция $z_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{p+1}z'(x) = -(my^2(0) - my^2(x))^{\frac{1}{p+1}}. \qquad (13)$$

По теореме сравнения Пеано $z_1(x) \geqslant y_1(x)$. Аналогично доказывается и лемма 2.

**Лемма 2.** Пусть $y_1(x)$ — решение уравнения (1) при $x > 0$, такое, что $y_1(0) > 0$, $y_1'(0) = 0$, а $0 < Q(x) \leqslant m = \text{const}$, $Q'(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$. Если $z_1(x)$ решение уравнения (9), такое, что $z_1(0) = y_1(0)$, $z_1'(0) = 0$, то $y_1(x) \geqslant z_1(x)$ на $[0, \bar{x}]$, где $\bar{x}$ — первый положительный нуль функции $z_1(x)$.

Доказательство теоремы 5. Из уравнения (1) следует

$$\frac{y'\frac{d}{dx}|y'^{p-1}|y'}{Q(x)} + yy' = 0.$$

Интегрируя это соотношение от $\xi$ до $x$, получаем

$$\frac{|y'(x)|^{p+1}}{(p+1)Q(x)} + \int_\xi^x \frac{Q'|y'|^{p+1}}{Q^2}dx + y^2(x) = \frac{|y'(\xi)|^{p+1}y'(\xi)}{(p+1)Q(\xi)} + y^2(\xi). \qquad (14)$$

Отсюда следует, что $y(x)$ ограничено. Рассмотрим функцию

$$\rho(x) = \frac{|y'(x)|^{p+1}}{(p+1)Q(x)} + y^2(x).$$

Из (12) следует, что она убывает и имеет предел при $x \to +\infty$. Если этот предел равен нулю, то утверждение теоремы получено. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}\rho(x) = \rho$. Всякое решение уравнения (1) в условиях теоремы 5 колеблется (например, ввиду теоремы 3). Пусть $t_k$, $t_{k+1}$ — последовательные нули $y'(x)$, $y(t_{k+1}) = 0$, $y(t_k) > 0$. Из лемм 1, 2 следует, что

$$Q(t_{k+1})^{-\frac{1}{p+1}}|t_k - t_{k+2}| \leqslant cQ(t_k)^{-\frac{1}{p+1}}$$

и $|y(t)|^2 < \frac{\rho}{2}$ на $[t_k - \tau, t_k + \tau]$, $\tau = c_1Q(t_k)^{-\frac{1}{p+1}}$. Из определения $\rho(x)$ получим

$$\frac{|y'(x)|^{p+1}}{(p+1)Q(x)} \geqslant \frac{\rho}{2} \text{ на } [t_k - \tau, t_k + \tau].$$

Из (14) следует, что

$$\int_{t_k-\tau}^{t_k+\tau} \frac{Q'|y'|^{p+1}}{Q^2}dx \geqslant \frac{\rho}{2}\int_{t_k-\tau}^{t_k+\tau}\frac{Q'}{Q}dx \geqslant \frac{3}{2}\ln\frac{t_k+\tau}{t_k-\tau}.$$

Так как $\tau \geqslant c(t_{k+2} - t_k)$, то

$$\int_{t_k}^{t_{k+2}} \frac{Q'}{Q^2}|y'|^{p+1}dx \geqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dx}{x}.$$

Суммируя эти неравенства по $k$, получаем противоречие, ибо в силу (14)

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{Q'}{Q^2}|y'|^{p+1}dx < \infty.$$

Итак, $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.— 216 с.
2. *Fowler R. H.* Further studies of Emden's and similar differential equations // Quart. J. Math.— 1931.— **2**, N 2.— P. 259—288.
3. *Мирзов Д. Д.* Об асимптотических свойствах решений одной системы типа Эмдена — Фаулера // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 9.— С. 1498—1504.

Моск. ун-т

Получено 20.12.91